Universität des Saarlandes
FR 6.1 Mathematik
Prof. Dr. G. Weitze-Schmithüsen
M.Sc. M. Kany
M.Sc. C. Steinhart

10. Übungsblatt zur Linearen Algebra I

Charakteristik, Körper, Ringhomomorphismus, linear unabhängig, Bilinearform

Aufgabe 1. ((Gruppe) 2P+2P)

a) Sei K ein Körper mit Charakteristik $p \neq 0$. Zeigen Sie, dass p eine Primzahl ist.

b) Sei K ein Körper und R ein Ring mit Eins. Sei weiterhin $\phi : K \to R$ ein Ringhomomorphismus mit Eins. Zeigen Sie, dass ϕ injektiv ist.

Aufgabe 2. ((Alleine) 2P+2P)

a) Gegeben seien zwei Vektorräume V, W, eine lineare Abbildung $\phi : V \to W$ und Vektoren $v_1, \dots, v_n \in V$. Zeigen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

   (i) Sind $v_1, \dots, v_n$ linear unabhängig, dann sind auch $\phi(v_1), \dots, \phi(v_n)$ linear unabhängig.

   (ii) Sind $\phi(v_1), \dots, \phi(v_n)$ linear unabhängig, dann sind auch $v_1, \dots, v_n$ linear unabhängig.

b) Geben Sie an, ob die Vektoren

$$v_1 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \quad , \quad v_2 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \quad , \quad v_3 := \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \quad , \quad v_4 := \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

linear unabhängig sind.

Aufgabe 3. ((Gruppe) 4P)

Sei $\mathbb{C}$ der Körper der komplexen Zahlen. Geben Sie jeweils an, ob die folgenden Abbildungen Ringhomomorphismen (mit oder ohne Eins) sind:

a) $\psi : \mathbb{C} \to \mathbb{R}^{2\times 2} \quad , \quad a + bi \mapsto \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$

b) $inv : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \quad , \quad a + bi \mapsto (a + bi)^{-1}$

c) $pot_2 : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \quad , \quad (a + bi) \mapsto (a + bi)^2$

d) $\phi_i : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{C} \quad , \quad f \mapsto f(i)$

Das Übungsblatt kann bis spätestens Freitag den 29. 01. 2021 um 23:59 Uhr abgegeben werden. Schreiben Sie Namen und Matrikelnummer aller Gruppenmitglieder sowie Ihre Übungsgruppe gut lesbar auf Ihre Abgabe. Es dürfen bis zu drei Personen gemeinsam in einer Übungsgruppe sein.

Aufgabe 4. ((Gruppe) 1Bonuspunkt+2Bonuspunkte)

Sei $\mathbb{F}_p$ der Körper mit p Elementen und $n \in \mathbb{N}$.

a) Wie viele Elemente hat der Vektorraum $\mathbb{F}_p^n$?

b) Wie viele Elemente hat $\mathrm{GL}_3(\mathbb{F}_p)$?

Aufgabe 5. ((Alleine) 2P+2P)

Auf dem letzten Übungsblatt haben wir gesehen, dass wir für jede Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$ eine bilineare Abbildung

$$\phi_A : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R} \quad , \quad (v, w) \mapsto v^t \cdot A \cdot w$$

erhalten.

a) Seien für $i \in [n], j \in [m]$ wie immer $e_i \in \mathbb{R}^n$ bzw. $e'_j \in \mathbb{R}^m$ der i-te bzw. j-te Standardvektor und $\phi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ eine bilineare Abbildung.

Zeigen Sie, dass für jedes $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ und $w = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$ die Zahl $\phi(v, w)$ bereits eindeutig durch die Werte $\phi(e_i, e'_j)$ bestimmt ist. Was sind diese Werte für die bilineare Abbildung ϕ_A?

b) Zeigen Sie, dass sich jede bilineare Abbildung $\phi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ als ϕ_A wie oben schreiben lässt und schreiben Sie die folgende bilineare Abbildung als ϕ_A:

$$\phi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^4 \mapsto \mathbb{R} \quad , \quad \left(\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \end{pmatrix} \right) \mapsto v_1 w_3 - 4 v_3 w_2 + 2 v_1 w_2 - 42 v_2 w_2 - v_3 w_1$$

Das Übungsblatt kann bis spätestens Freitag den 29. 01. 2021 um 23:59 Uhr abgegeben werden. Schreiben Sie Namen und Matrikelnummer aller Gruppenmitglieder sowie Ihre Übungsgruppe gut lesbar auf Ihre Abgabe. Es dürfen bis zu drei Personen gemeinsam in einer Übungsgruppe sein.